Algorytm obliczający ilość unikalnych otwarć gomoku swap

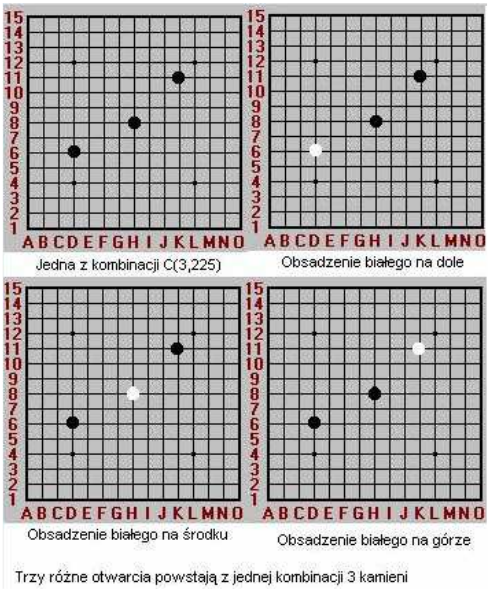
1.Historia.
Pierwsze znane mi próby poruszenia tego tematu miały miejsce 26. stycznia 2007 na forum PSGRiP (użytkownik Ece). Zainteresowanie nim trwało jedynie 4 dni, podczas których wielu (w tym ja) główkowało, jak obliczyć kombinatorycznie ilość otwarć.
Dla planszy 3x3, z inspiracji nad pomysłem użytkownika Lonewolf udało się ręcznie policzyć, że jest ich 38.
Wyzwaniem wciąż pozostał problem dla planszy o większych rozmiarach, np. 5x5 czy docelowe 15x15. Nie dało się tego zrobić metodą jak w przypadku 3x3.

Spośród prezentowanych na forum wyników były również moje wraz z pomysłem, że można napisać uniwersalny algorytm w postaci funkcji f(n), której argumentem n jest rozmiar planszy a wartością – liczba otwarć.
Żadne z dotychczasowych wyników nie były poprawne, nie mniej jednak mój trop, którym się wtedy poruszałem, jak się okazuje teraz – wymagał niewielkiej poprawki, za to wielkiej uwagi – żeby się nie pomylić w liczeniu.

2. Algorytm
W pierwszej części wytłumaczę na przykładzie planszy 15x15, w drugiej części podam wzory matematyczne.

- Na ile możliwych sposobów można ułożyć na gobanie 3 czarne kamienie?
Pól mamy 15*15 czyli 225, kamieni 3 i nie interesuje nas kolejność bo wszystkie kamienie są czarne – zatem stosujemy kombinatoryczny wzór na kombinacje bez powtórzeń
C(3,225).
dla ciekawskich: http://pl.wikipedia.org/wiki/Kombinacja_bez_powt%C3%B3rze%C5%84

Otwarcie swap zawiera 2 czarne i jeden biały, zatem kontynuując powyższy tok rozumowania, zamieniamy czarny kamień na biały i w ten sposób powstaną z takiego układu trzy otwarcia swap. Dlatego też liczba wszystkich możliwych otwarć swap(nazwijmy je literą W) na gobanie wyniesie W = 3C(3,225) = 5619600 . Sytuację wyjaśnia rysunek:

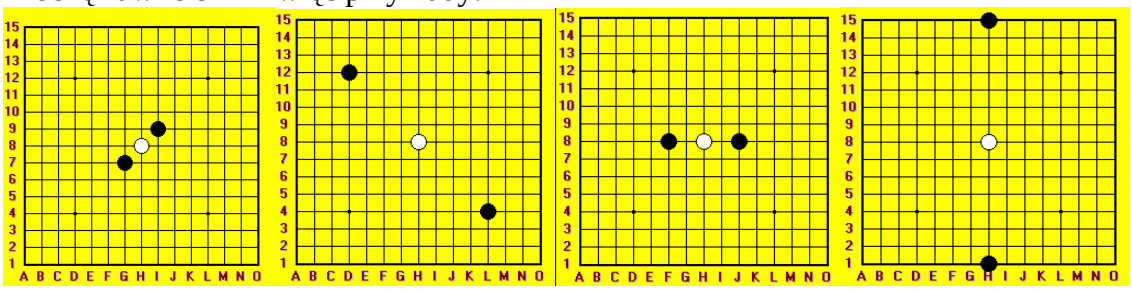


- Czy to już koniec? Nie. Chodzi nam przecież o niepowtarzalne otwarcia a powyższa liczba dotyczy wszystkich otwarć. Otwarcia się powtarzają, ponieważ planszę można obrócić o 90,180,270 i 360 stopni a dodatkowo można ją odwrócić.
Oznacza to, że niektóre unikalne otwarcia będzie można przedstawić nawet na 8 sposobów.
Nie będzie to 8 nowych otwarć, tylko wciąż jedno i to samo.
Z obserwacji i analiz rozmieszczenia geometrycznego otwarć na gobanie zauważyłem, że niektóre z nich mogą być powielane tylko 2 razy, inne tylko 4 a jeszcze inne tylko 8 razy.
Jest to fakt bardzo istotny w liczeniu ilości niepowtarzalnych otwarć i wynikający z „symetrii kamieni tworzących open" bądź braku tej symetrii. Jeśli będziemy wiedzieć, ile jest powtarzalnych otwarć z poszczególnych grup – będziemy mogli te poszczególne ilości później podzielić odpowiednio przez 2 lub 4 lub 8.

Podzielimy otwarcia(powtarzalne) na 5 grup:

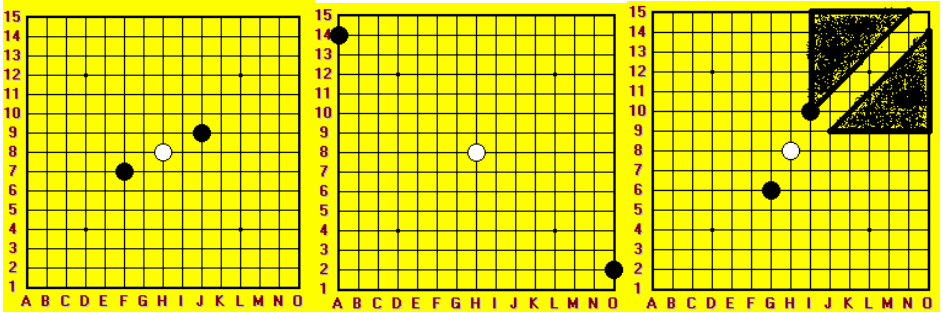
A.) otwarcia z białym kamieniem na środku planszy oraz czarnymi na osiach symetrii gobanu leżącymi w taki sposób, żeby były symetryczne do siebie względem środka planszy

Trochę zawile brzmi więc przykłady:



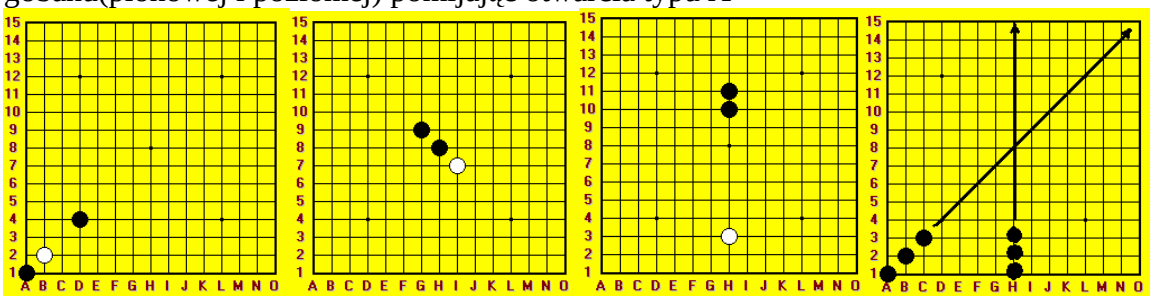
Podzielę dla pewnej wygody tą grupę na podgrupy
A1 – openy w ukosach
A2 – openy w pionie i poziomie
Otwarć typu A1 mamy 7x2 = 14
Otwarć typu A2 mamy 7x2 = 14
Otwarć typu A mamy 7x4 = **28**

B.) otwarcia z białym kamieniem na środku planszy oraz czarnymi NIE leżącymi na osiach symetrii gobanu, leżącymi w taki sposób, żeby były symetryczne do siebie względem środka planszy



Biały stoi w miejscu, a czarne są obsadzone na pozycjach zaczernionych(drugi czarny automatycznie „ustawia się" w lewym dolnym rogu, więc nie zwracamy na niego uwagi) czyli 7x7-7
Ponieważ mamy dwa ukosy mnożymy przez dwa.
Otwarć typu B mamy: (7x7-7)x2 = **84**

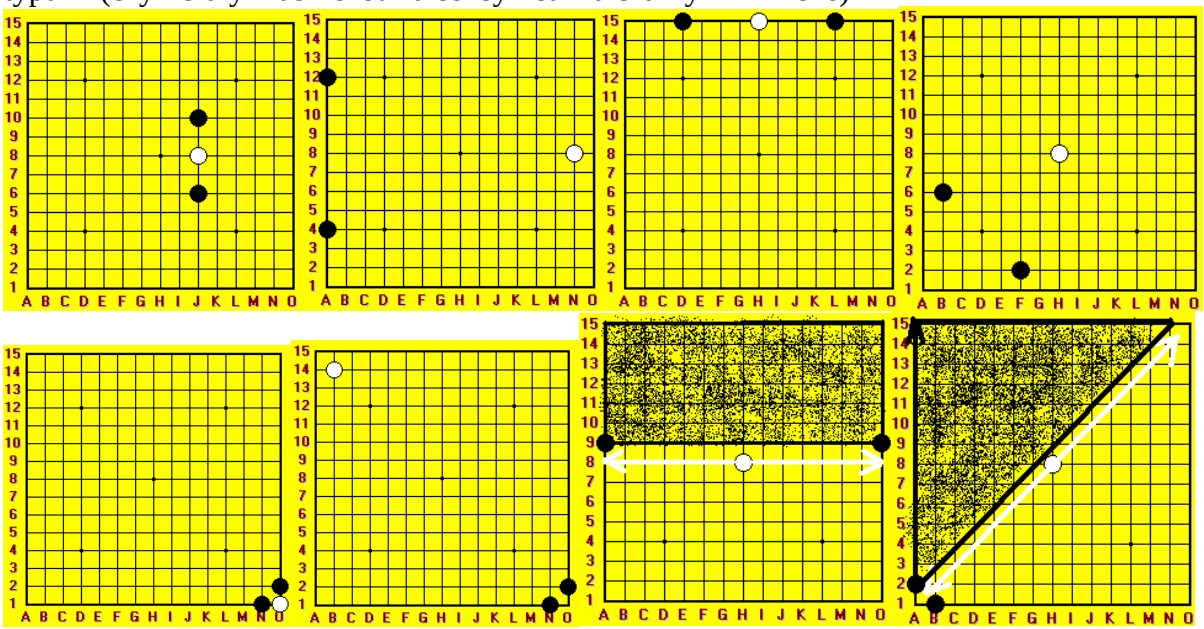
C.) otwarcia z wszystkimi kamieniami leżącymi na przekątnych lub na środkowych liniach gobanu(pionowej i poziomej) pomijając otwarcia typu A



Na ile sposobów można ustawić trzy czarne kamienie na przekątnej lub na środkowej lini? Korzystamy ze znanego już wzory na kombinacje bez powtórzeń. W tym przypadku będzie to C(3,15). I znów – zamieniamy jeden kamień na biały, powstaną z jednego układu 3 odrębne otwarcia dlatego powyższą liczbę mnożymy przez 3 i otrzymujemy 3C(3,15) = 1365
Ponieważ mamy dwa ukosy, mnożymy wynik razy 2.
Ponieważ mamy jeszcze środkowe linie na planszy ponownie mnożymy razy 2.
Daje to wynik: 3C(3,15)x2x2 = 12C(3,15)
Pamiętamy jeszcze o odjęciu od tej liczby, liczbę otwarć typu A. Ostatecznie:

Otwarć typu C mamy 12C(3,15) – 7x4 = **<u>5432</u>**

D.) otwarcia symetryczne względem jednej z osi symetrii planszy z pominięciem otwarć typu A (czyli biały musi leżeć na osi symetrii a czarny NIE może)



Podzielę dla wygody tą grupę na dwie podgrupy
D1 – biały „chodzi” po liniach środkowych gobanu
D2 – biały „chodzi” po ukosach

Zgodnie z przedostatnim rys. tej strony, czarny może zajmować pola na 15x7 sposobów (pole zaczernione). Biały może zajmować tylko 15 pozycji więc mnożymy: 15x7x15
Mamy pion i poziom więc dodatkowo mnożymy razy 2. Pamiętamy o pominięciu otwarć typy A, a w tym przypadku dokładnie typu A2.
Otwarć typu D1 mamy 15x7x15x2 – 7x2 = 3136

Zgodnie z ostatnim rys. poprzedniej strony, czarny może zajmować zaczernione pole, czyli być ustawiony na (15x15-15)/2 sposobów. Biały może zajmować tylko 15 pozycji więc mnożymy: 15x(15x15-15)/2. Pamiętamy, że mamy dwa ukosy więc mnożymy jeszcze razy 2 i pamiętamy o pominięciu otwarć typu A1, co daje wynik:
Otwarć typu D2 mamy 15x(15x15-15) – 7x2 = 3136

Otwarć typu D mamy D1+D2 = **6272**

E.) otwarcia niesymetryczne
Nie można policzyć tych otwarć metodą bezpośrednią, jak w powyższych przykładach.
Nie musimy. Pamiętamy, że liczba wszystkich otwarć możliwych do ustawienia wynosi W=5619600
Oznaczmy przez S, liczbę wszystkich symetrycznych otwarć czyli:
S=A+B+C+D = 11816
Wiemy, że nie ma innych typów otwarć czyli spełnione jest równanie:

W=E+S
Zatem E=W-S = 5607784

Wszystkie podane do tej pory liczby dotyczyły otwarć powielanych czyli otwarć nieunikalnych, powtarzających się przez obrót planszy lub odwrócenie względem pionu i poziomu.

Z moich obserwacji wynika, że:
- otwarcia typu A można przedstawić na 2 sposoby (na przykład lewy ukos/prawy ukos albo pion/poziom)
- otwarcia typu B można przedstawić na 4 sposoby
- otwarcia typu C można przedstawić na 4 sposoby
- otwarcia typu D można przedstawić na 4 sposoby
- otwarcia typu E można przedstawić na 8 sposobów (obrót oraz odwrócenie zarówno względem pionu jak i poziomu daje inne ułożenie)

W celu podania liczby niepowtarzalnych(nie powielających się) się otwarć sumujemy

A/2 + B/4 + C/4 + D/4 + E/8 = **703934**

Można uogólnić obliczenia dla dowolnego wymiaru planszy, nie tylko dla 15x15, gdzie n=15. Trzeba pamiętać, żeby **n** było naturalną liczbą nieparzystą.
Jeśli n=15, to 14= (n-1), 7 = (n-1)/2, itd.
Nie będę przepisywał wszystkich obliczeń, które sprowadzały się do „skracania silni”(w symbolu Netwona) i dodawania wielomianów. Podam więc gotowe wzory.

$$W=\frac{n^6-3n^4+2n^2}{2},\ A=2(n-1),\ B=\frac{n^2-4n+3}{2},\ C=2n^3-6n^2+2n+2$$

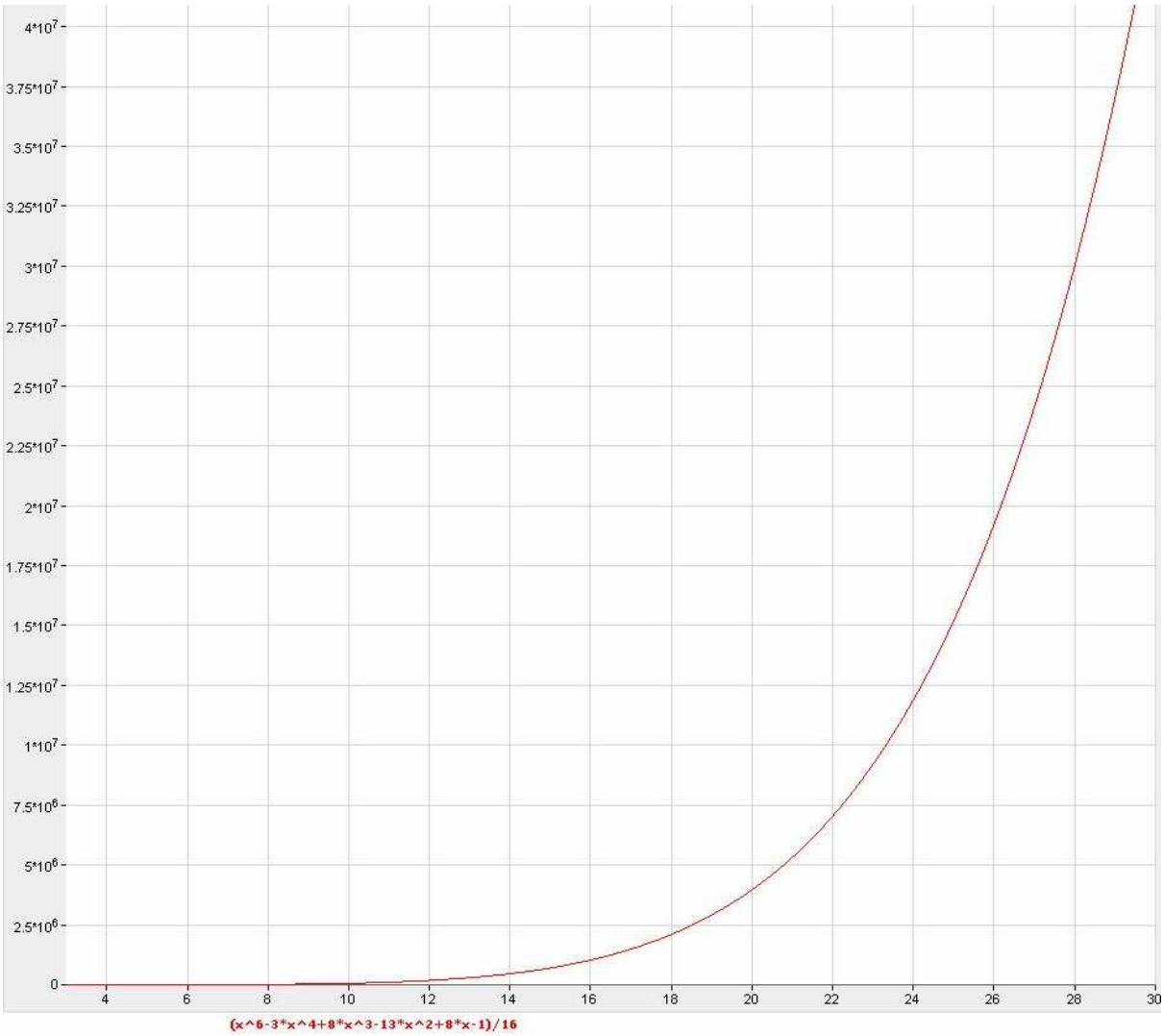
$$D=2n^3-2n^2-2n+2,\ E=\frac{n^6-3n^4-8n^3+17n^2-7}{2}$$

$$f(n) = \frac{n^6 - 3n^4 + 8n^3 - 13n^2 + 8n - 1}{16} \text{ dla } n \geq 3$$

Tabela wartości funkcji:

f[3] = 38
f[4] = 228.9375
f[5] = 904
f[6] = 2754.6875
f[7] = 7038
f[8] = 15823.9375
f[9] = 32288
f[10] = 61048.6875
f[11] = 108550
f[12] = 183488.9375
f[13] = 297288
f[14] = 464612.6875
f[15] = 703934
f[16] = 1038135.9375
f[17] = 1495168
f[18] = 2108742.6875
f[19] = 2919078
f[20] = 3973684.9375
f[21] = 5328200
f[22] = 7047262.6875
f[23] = 9205438
f[24] = 11888183.9375
f[25] = 15192864
f[26] = 19229804.6875
f[27] = 24123398
f[28] = 30013248.9375
f[29] = 37055368
f[30] = 45423408.6875
f[31] = 55309950
f[32] = 66927823.9375
f[33] = 80511488

Zobacz wykres w Google:
http://www.google.pl/search?num=20&hl=pl&safe=off&sa=X&ei=CHv8TsunGMHSsgbM1ckL&ved=0CBcQBSgA&q=(x%5E6-3*x%5E4%2B8x%5E3-13x%5E2%2B8*x-1)/16&spell=1


4*10^7
3.75*10^7
3.5*10^7
3.25*10^7
3*10^7
2.75*10^7
2.5*10^7
2.25*10^7
2*10^7
1.75*10^7
1.5*10^7
1.25*10^7
1*10^7
7.5*10^6
5*10^6
2.5*10^6
0
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
(x^6-3*x^4+8*x^3-13*x^2+8*x-1)/16