Дистанционный семинар 4 по дискретной математике, 407 группа

Ю. В. Таранников

23 сентября 2020 г.

ТЕМА «ТЕОРЕМА ПОЙА»

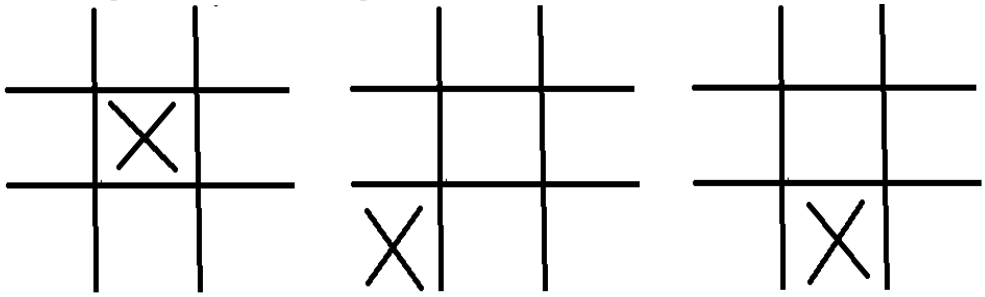
Теория: А. В. Чашкин, Дискретная математика. Глава 4.

Методический материал: Ю. В. Таранников. Дискретная математика. Задачник. §1.2, §2.7.

Применение теории Пойа на примерах подсчета числа неэквивалентных раскрасок трехмерного кубика, который можно крутить в пространстве, обсуждалось на лекции, подробно разбирается в учебнике и задачнике. Рассмотрим незаезженный пример.

Всем известна игра **крестики-нолики**, На доске 3×3 соперники по очереди ставят крестики и нолики. Партия заканчивается победой того из игроков, кто поставит три своих знака в ряд (по горизонтали, вертикали или диагонали). Если все клетки будут заполнены, а три своих знака в ряд никто не поставит, то партия считается закончившейся вничью.

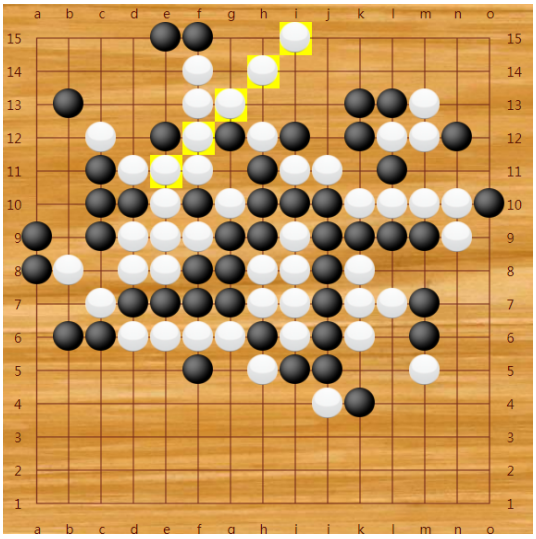
Первый ход в крестиках-ноликах можно сделать в любую из девяти клеток, однако понятно, что *неэквивалентных* первых ходов только три.



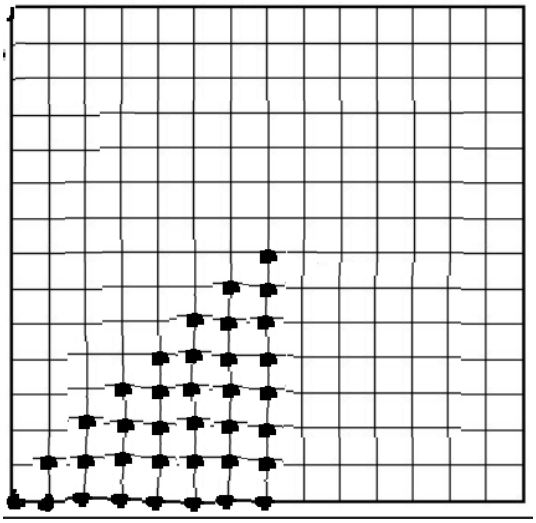
Игру крестики-нолики легко полностью исследовать, достичь в ней совершенства, после чего продолжать в нее играть будет малосодержательным занятием.

Продвинутым вариантом крестиков-ноликов является игра **гомоку** (название имеет восточно-азиатское происхождение). В игре гомоку игра идет на доске 15×15, причем считаются не клетки, а линии, ходы делаются в пункты на пересечении линий. Один из соперников играет черными камнями, второй — белыми камнями. Первый ходом первый игрок выставляет черный камень в любой пункт доски, вторым ходом второй игрок выставляет белый камень в любой свободный пункт доски, третьим ходом первый игрок выставляет черный камень в любой свободный пункт доски и так далее. Соперники выставляюи камни своего цвета на доску поочередно, пока один из них не выставит ряд из пяти камней своего цвета без пропусков. Камни по ходу игры с доски не снимаются и

не перемещаются.



Найдем число несимметричных (неэквивалентных первых ходов (будем также называть позицию после выставления на доску первого камня одноходовым дебютом). Несложно видеть, что симметриями доски можно любой пункт перевести в пункт, лежащий в изображенном ниже треугольнике.



Таким образом, число несимметричных первых ходов равно $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.
Подсчитаем это число с помощью леммы Бернсайда.
Лемме Бернсайда утверждает, что

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g).$$

В данном случае группа G преобразований доски, переводящих ее в себя (симметрий доски) действует на множестве D одноходовых дебютов, которые можно рассматривать как раскраски доски, при которых один пункт доски красится в черный цвет, а остальные пункты — в прозрачный цвет. Величина N — это число классов эквивалентности, т. е. различных (или несимметричных)

одноходовых дебютов.

Группа G симметрий доски состоит из 8 преобразований: тождественного, поворотов на 90, 180 и 270 градусов, а также четырех осевых симметрий относительно осей, проходящих через центр доски: горизонтальной, вертикальной и двух диагональных.

Теперь пройдемся по всем симметриям g из G и подсчитаем, сколько одноходовых дебютов каждая из них переводит в себя.

Тождественная симметрия e переводит в себя все одноходовые дебюты. Черный камень можно поставить 225 способами. Следовательно, $\psi(g_e) = 225$.

При поворотах на 90, 180 и 270 градусов переходит в себя только центральный пункт доски. Поэтому $\psi(g_{90}) = \psi(g_{180}) = \psi(g_{270}) = 1$.

Для каждой из четырех осевых симметрий подсчет будет одинаковым, поскольку во всех случаях на оси симметрии 15 пунктов. Чтобы одноходовый дебют при осевой симметрии перешел в себя, черный камень должен стоять на оси симметрии. Это 15 способов. Поэтому $\psi(g_|) = \psi(g_-) = \psi(g_/) = \psi(g_\backslash) = 15$.

В итоге получаем, что число N несимметричных (неэквивалентных) одноходовых дебютов равно

$$N = \frac{1}{8}\left(225 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 15\right) = 36.$$

Казалось бы, считать по лемме Бернсайда оказалось даже дольше, чем непродвинутым способом. Однако рассмотрим более сложную задачу.

В игре гомоку играющий черными камнями имеет каждый раз после своего хода на один камень больше, что дает ему большое преимущество. Доказано, что при правильной игре черные выигрывают независимо от ходов белых.

Поэтому, чтобы уравновесить шансы соперников, используются различные дебютные регламенты. Одним из них является дебютный регламент SWAP. При игре по дебютному регламенту SWAP начинающий игру ставит на доску три камня: черный, белый и снова черный, т. е. всего два черных и один белый. После этого его соперник выбирает, камнями какого цвета он продолжит партию. После выбора цвета камней игра продолжается по обычным правилам с чередованием ходов, т. е. следующий камень ставит играющий белыми, потом играющий черными и т. д.

При игре с регламентом SWAP игроку, ставящему первые три камня, невыгодно выставлять дебют, в котором преимущество имеют черные или белые, потому что в этом случае его соперник выберет для продолжения игры цвет, имеющий в данном дебюте преимущество. Поэтому начинающему игру нужно ставить дебют, в котором стороны имеют примерно равные шансы.

Регламент SWAP не только уравнивает шансы сторон, но и вносит огромное разнообразие, кардинальным образом расширяя множество возникающих в реальных партиях дебютных позиций, ведь первые три камня можно ставить по всей доске.

Естественно, игроков волнует вопрос о числе несимметричных (неэквивалентных) трехходовых дебютов, чтобы оценить, теорию какого числа дебютов потенциально надо разрабатывать. Понятно, что порядок выставления двух черных камней значения не имеет, а вот расстояния от камней до краев доски важны.

Здесь уже попытки наивных подсчетов без применения математической теории сразу

Считаем по лемме Бернсайда:

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \psi(g).$$

В данном случае группа G преобразований доски, переводящих ее в себя (симметрий доски) действует на множестве D трехходовых дебютов, которые можно рассматривать как раскраски доски, при которых два пункта доски красятся в черный цвет, один пункт доски красится в белый цвет

а остальные 222 пункта — в прозрачный цвет. Величина N — это число классов эквивалентности, т. е. различных (или несимметричных) трехходовых дебютов.

Мы уже указывали, что группа G симметрий доски состоит из 8 преобразований: тождественного, поворотов на 90, 180 и 270 градусов, а также четырех осевых симметрий относительно осей, проходящих через центр доски: горизонтальной, вертикальной и двух диагональных.

Теперь пройдемся по всем симметриям g из G и подсчитаем, сколько трехходовых дебютов каждая из них переводит в себя.

Тождественная симметрия e переводит в себя все дебюты. Белый камень можно поставить 225 способами, два черных на оставшиеся места $\binom{224}{2}$ способами. Итого $\psi(g_e) = \frac{225 \cdot 224 \cdot 223}{2}$.

Поворотов на 90 градусов, переводящих дебют в себя, нет. Действительно, из двух черных камней хотя бы один должен быть не в центре, но любой нецентральный пункт доски при последовательных поворотах на 90 градусов проходит цикл длины 4, а четырех черных камней на все эти пункты в распоряжении нет. Поэтому $\psi(g_{90}) = \psi(g_{270}) = 0$.

При действии поворота на 180 градусов (т. е. центральной симметрии) все пункты доски, кроме центра, разбиваются на пары переходящих друг в друга. Поэтому, чтобы дебют перешел в себя, белый камень должен стоять в центре, а два черных — быть центрально симметричными. Их можно выбрать $\frac{224}{2} = 112$ способами. Отсюда $\psi(g_{180}) = 112$.

Для каждой из четырех осевых симметрий подсчет будет одинаковым, поскольку во всех случаях на оси симметрии 15 пунктов. Чтобы дебют при осевой симметрии перешел в себя, белый камень должен стоять на оси симметрии. Это 15 способов. Для пары же черных камней есть две возможности. Либо они тоже стоят на оси симметрии, это $\binom{14}{2}$ способов. Либо они должны быть симметричны относительно оси симметрии, это $\frac{225-15}{2} = 105$ способов. Поэтому $\psi(g_|) = \psi(g_-) = \psi(g_/) = \psi(g_\backslash) = 15 \cdot \left(\binom{14}{2} + 105\right)$.

В итоге получаем, что число N несимметричных (неэквивалентных) дебютов равно

$$N = \frac{1}{8}\left(\frac{225 \cdot 224 \cdot 223}{2} + 2 \cdot 0 + 112 + 4 \cdot 15 \cdot \left(\frac{14 \cdot 13}{2} + 105\right)\right) = 703934.$$

Сосчитаем теперь число одноходовых и трехходовых дебютов гомоку с помощью теоремы Пойа.

Найдем сначала цикловые индексы преобразований, входящих в группу симметрий доски 15×15.

Тождественное преобразование. Каждый из 225 пунктов является циклом длины 1. Поэтому $I_e = z_1^{225}$.

Повороты на 90 и 270 градусов. Центральный пункт является циклом длины 1, остальные пункты разбиваются на циклы длины 4. Отсюда $I_{g_{90}} = I_{g_{270}} = z_1 \cdot z_4^{56}$.

Поворот на 180 градусов (т. е. центральная симметрия). Центральный пункт является циклом длины 1, остальные пункты разбиваются на циклы длины 2. Отсюда $I_{g_{180}} = z_1 \cdot z_2^{112}$.

Осевые симметрии. Каждый из 15 на оси симметрии является циклом длины 1, остальные пункты разбиваются на циклы длины 2. Отсюда $I_{g_|} = I_{g_-} = I_{g_/} = I_{g_\backslash} = z_1^{15} \cdot z_2^{105}$.

Выписываем цикловой индекс всей группы G симметрий доски:

$$P_G(z_1, z_2, \dots) = \frac{1}{8}(z_1^{225} + 2z_1 z_4^{56} + z_1 z_2^{112} + 4z_1^{15} z_2^{105}).$$

Цветов у нас три: черный (соответствующий черным камням), белый (соответствующий белым камням) и прозрачный (соответствующий пустым пунктам). Сопоставим каждому пункту элемент коммутативного кольца K. Черному цвету сопоставим x, белому цвету сопоставим y. Прозрачному цвету можно было бы сопоставить, например, t, но удобнее и проще сопоставить 1.

По теореме Пойа подставляем вместо z_i выражение $x^i + y^i + 1$. Получаем

$$\sum_F W(F) = \frac{1}{8}((x+y+1)^{225}+2(x+y+1)(x^4+y^4+1)^{56}+(x+y+1)(x^2+y^2+1)^{112}+4(x+y+1)^{15}(x^2+y^2+1)^{105}).$$

Теперь после раскрытия скобок и приведения подобных коэффициент при $x^n y^m$ даст число неэквивалентных (несимметричных) позиций с n черными и m белыми камнями.

Посчитаем число несимметричных первых ходов (одноходовых дебютов). Это будет коэффициент при x.

При раскрытии $(x + y + 1)^{225}$ коэффициент при x получится равным 225.

При раскрытии $(x + y + 1)(x^4 + y^4 + 1)^{56}$ коэффициент при x получится равным 1.

При раскрытии $(x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1)^{112}$ коэффициент при x получится равным 1.

При раскрытии $(x + y + 1)^{15}(x^2 + y^2 + 1)^{105}$ коэффициент при x получится равным 15.

Таким образом, коэффициент при x во всем выражении получится равным

$$\frac{1}{8}(225 + 2 \cdot 1 + 1 + 4 \cdot 15) = 36.$$

Посчитаем число несимметричных трехходовых дебютов. Это будет коэффициент при x^2y.

При раскрытии $(x + y + 1)^{225}$ коэффициент при x^2y получится равным $\binom{225}{2,1,222} = \frac{225 \cdot 224 \cdot 223}{2}$.

При раскрытии $(x + y + 1)(x^4 + y^4 + 1)^{56}$ коэффициент при x^2y получится равным 0.

При раскрытии $(x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1)^{112}$ коэффициент при x^2y получится равным 112.

При раскрытии $(x+y+1)^{15}(x^2+y^2+1)^{105}$ коэффициент при x^2y получится равным $\binom{15}{2,1,12}\binom{105}{0,0,105}+\binom{15}{0,1,14}\binom{105}{1,0,104} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{2} + 15 \cdot 105 = 15 \cdot \left(\frac{14 \cdot 13}{2} + 105\right)$.

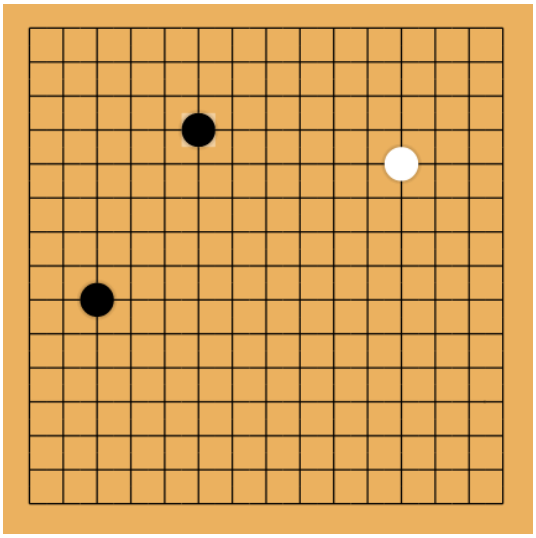
Таким образом, коэффициент при x^2y во всем выражении получится равным

$$\frac{1}{8}\left(\frac{225 \cdot 224 \cdot 223}{2} + 2 \cdot 0 + 112 + 4 \cdot 15 \cdot \left(\frac{14 \cdot 13}{2} + 105\right)\right) = 703934.$$

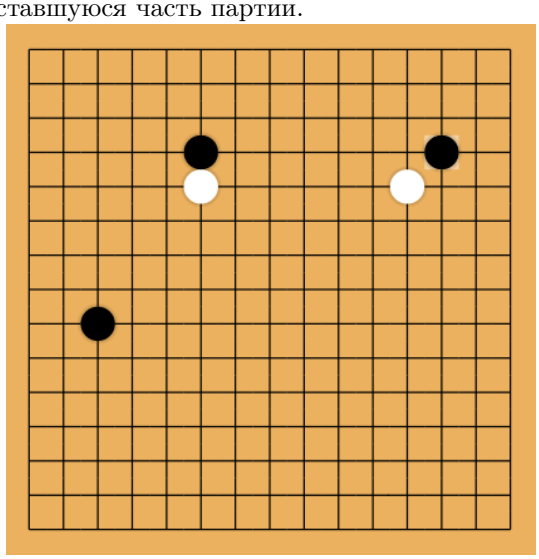
Мы видим, что в конечном итоге числовые выкладки по лемме Бернсайда и по теореме Пойа получились очень похожими. Это и немудрено с учетом того, что лемма Бернсайда используется при доказательстве теоремы Пойа. Однако заметим, что, проделав предварительную работу, мы теперь сможем найти число неэквивалентных позиций с n черными и m белыми камнями с помощью формальных алгебраических операций: раскрывая скобки, приводя подобные и находя коэффициент при $x^n y^m$. Если же мы захотим продолжать решать задачу с ростом n и m по лемме Бернсайда, то нам придется проводить каждый раз новые все более и более запутанные комбинаторные рассуждения с растущим числом случаев, и в конце концов наш мозг взорвется.

Впрочем, при решении конкретных задач применение леммы Бернсайда может оказаться не более трудоемким, чем применение теоремы Пойа.

Для полноты рассказа расскажу, что у регламента SWAP есть существенный недостаток. Дело в том, что игрок может дома подготовить очень острый дебют, в котором камни раскиданы по доске, и где от обеих сторон требуется поначалу сделать длинную цепочку единственных ходов, найти которые во время партии практически нереально. Уж из 703934 дебютов можно дома найти и отшлифовать что-то острое, неизвестное и непосильное для соперника. Такой подход практически гарантирует победу выставляющему дебют игроку. Острейшие трехходовые дебюты с широко разбросанными по доске камнями в кругу игроков в гомоку называются *козами.*



Для исправления этого недостатка в современных соревнованиях вместо дебютного регламента SWAP применяется дебютный регламент SWAP2. При игре по регламенту SWAP2 первый игрок по-прежнему ставит трехходовый дебют (три камня: черный, белый, черный), а второй игрок, помимо возможности выбора цвета камней на оставшуюся часть партии, получает дополнительную возможность: поставить еще два камня: белый и черный. В последнем случае уже первый игрок выбирает цвет камней на оставшуюся часть партии.



Дополнительная возможность введена для того, чтобы второй игрок смог сбить первого с заготовленных заранее вариантов. При этом второй игрок сам может заранее подготовить острую контрзаготовку из двух дополнительных камней на любимый дебют соперника. Поэтому крайне опасно все время ставить одни и те же трехходовые дебюты и надо их чередовать в рамках широкого дебютного репертуара, что еще более способствует разнообразию возникающих игровых позиций.

Количество неэквивалентных пятиходовых позиций (с тремя черными камнями и двумя белыми) вы можете посчитать на досуге с использоанием леммы Бернсайда или теоремы Пойа. При использовании теоремы Пойа все необходимые заготовки мы уже сделали. Осталось лишь найти после раскрытия скобок и приведения подобных коэффициент многочлена при x^3y^2.

Поиграть в гомоку онлайн можно, например, на сайтах https://www.playok.com/ru/gomoku/ и https://logic-games.spb.ru/gomoku/ .

ДОМАШНИЕ ЗАДАЧИ

1. Решите задачу 1.28 из задачника. Пусть n — произвольное натуральное число. Найдите наибольший возможный порядок подгруппы G группы S_n, относительно которой множество $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ разбивается на два класса эквивалентности.

УКАЗАНИЕ. Если какая-то из последующих задач решается с помощью леммы Бернсайда без привлечения теоремы Пойа, то разрешается решать ее с помощью леммы Бернсайда. Можно прислать два решения: с применением леммы Бернсайда и с применением теоремы Пойа.

2. Решите задачу 2.113 из задачника. Функции $f : Z_{17}^* \to Z_2$ и $g : Z_{17}^* \to Z_2$ называются эквивалентными, если существует такое целое k, что для любого $x \in Z_{17}^*$ и $y = 2^k x \pmod{17}$ справедливо равенство $f(x) = g(y)$. Найти количество неэквивалентных функций из Z_{17}^* в Z_2, принимающих значение 1 ровно на 7 аргументах.

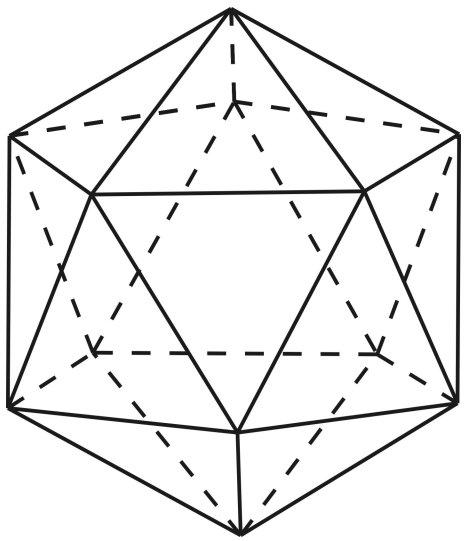
3. Решите задачу 2.109 из задачника. Сколько существует неэквивалентных раскрасок вершин правильного 18-угольника, если 6 вершин окрашены в красный цвет, а 12 вершин - в синий цвет?

Указание. Многоугольник переворачивать нельзя (а бусы можно).

4. Решите задачу 4.9 из книги А. В. Чашкина, она же 2.110 в задачнике. Сколькими различными неэквивалентными способами можно раскрасить ребра правильного тетраэдра тремя красками?

5. Решите задачу 2.111 из задачника. Сколькими различными неэквивалентными способами можно раскрасить грани икосаэдра двумя красками?

Указание. Икосаэдр имеет 20 треугольных граней, 12 вершин и 30 ребер, из каждой вершины выходит 5 ребер.



6. Решите задачу 2.112 из задачника. Сколькими различными неэквивалентными способами можно раскрасить вершины и грани тетраэдра, если вершины покрашены двумя разными красками, а грани — тремя?

P. S. Красивые геометрические картинки для сопровождения рассказа решений советую готовить заранее!